

Fonctions de navigation harmoniques stochastiques – Application à la planification robuste de trajectoires d'avions

Isabelle Santos

Stéphane Puechmorel, Guillaume Dufour

25 février 2019



INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
de TOULOUSE



Croissance prévisionnelle du trafic



FIGURE : Eurocontrol – le trafic en 2050

- Nombre de vols
 - trafic aérien ↑

Croissance prévisionnelle du trafic



FIGURE : Eurocontrol – le trafic en 2050

- Nombre de vols
 - trafic aérien ↑
 - saturation de l'espace aérien

Croissance prévisionnelle du trafic

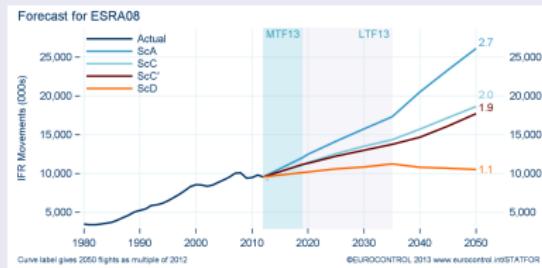


FIGURE : Eurocontrol – le trafic en 2050

- Nombre de vols
 - trafic aérien ↑
 - saturation de l'espace aérien
 - source de retards

Introduction et contexte

Gestion du trafic en-route



- couloirs aériens

FIGURE : Routes aériennes supérieures – SIA

Introduction et contexte

Gestion du trafic en-route



- couloirs aériens
 - routes directes

FIGURE : Routes aériennes supérieures – SIA



Introduction et contexte

Gestion du trafic en-route



FIGURE : Routes aériennes supérieures – SIA

- couloirs aériens
 - routes directes
 - espace utilisé

Introduction et contexte

Gestion du trafic en-route

Poste de contrôle



- secteurs aériens

FIGURE : Poste de contrôle sur l'écran duquel figure un secteur aérien et des couloirs aériens qui le traversent.

Introduction et contexte

Gestion du trafic en-route

Poste de contrôle



FIGURE : Poste de contrôle sur l'écran duquel figure un secteur aérien et des couloirs aériens qui le traversent.

- secteurs aériens
- capacité limitée

Introduction et contexte

Gestion du trafic en-route

Planification robuste de trajectoires d'avions

- résoudre en avance de phase les conflits qui pourraient arriver

Introduction et contexte

Gestion du trafic en-route

Planification robuste de trajectoires d'avions

- résoudre en avance de phase les conflits qui pourraient arriver
- réduire le nombre de conflits résiduels

Introduction et contexte

Gestion du trafic en-route

Planification robuste de trajectoires d'avions

- résoudre en avance de phase les conflits qui pourraient arriver
- réduire le nombre de conflits résiduels
- trajectoires pré-négociées sans conflits

Planification tactique à l'horizon stratégique



Introduction et contexte

Gestion du trafic en-route

Planification robuste de trajectoires d'avions

- résoudre en avance de phase les conflits qui pourraient arriver
- réduire le nombre de conflits résiduels
- trajectoires pré-négociées sans conflits

Planification tactique à l'horizon stratégique

- horizons de gestion du trafic : stratégique, tactique, d'urgence

Introduction et contexte

Gestion du trafic en-route

Planification robuste de trajectoires d'avions

- résoudre en avance de phase les conflits qui pourraient arriver
- réduire le nombre de conflits résiduels
- trajectoires pré-négociées sans conflits

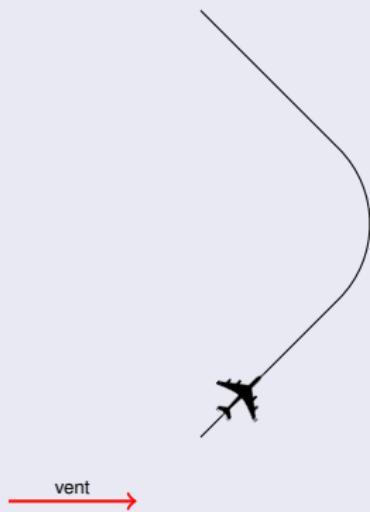
Planification tactique à l'horizon stratégique

- horizons de gestion du trafic : stratégique, tactique, d'urgence
- probabilité de conflits rémanents

Introduction et contexte

Gestion du trafic en-route

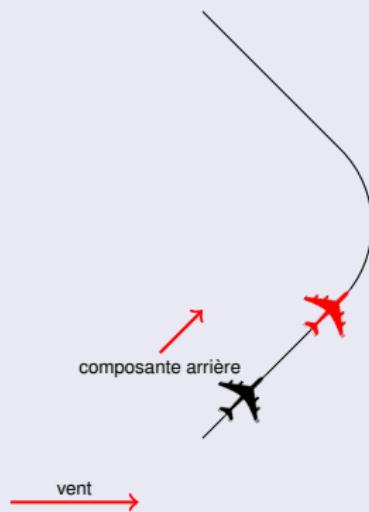
Influence du vent



Introduction et contexte

Gestion du trafic en-route

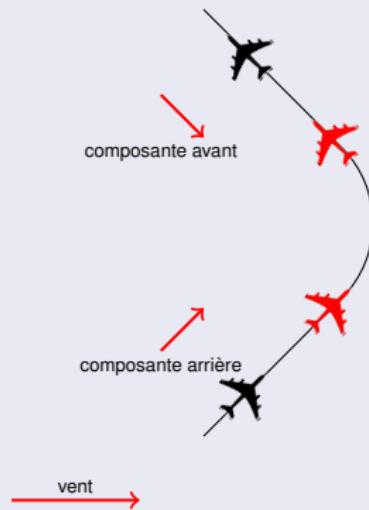
Influence du vent



Introduction et contexte

Gestion du trafic en-route

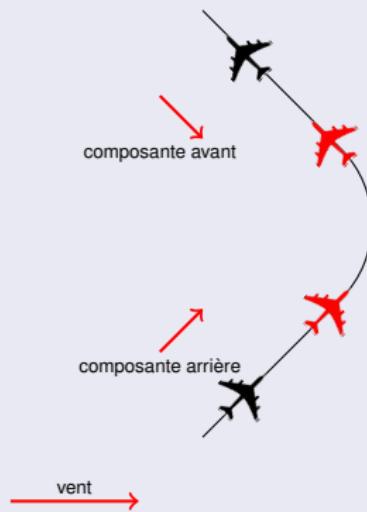
Influence du vent



Introduction et contexte

Gestion du trafic en-route

Influence du vent



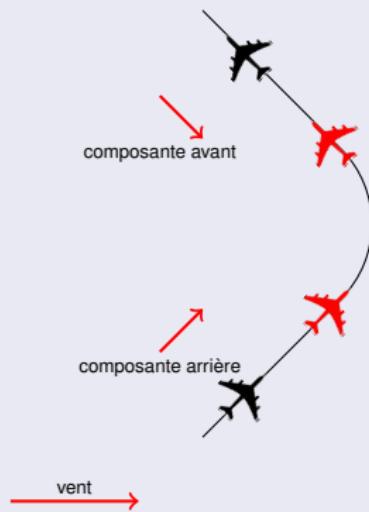
Modèle des incertitudes

- décallages longitudinaux
- décallages latéraux corrigés par le FMS

Introduction et contexte

Gestion du trafic en-route

Influence du vent



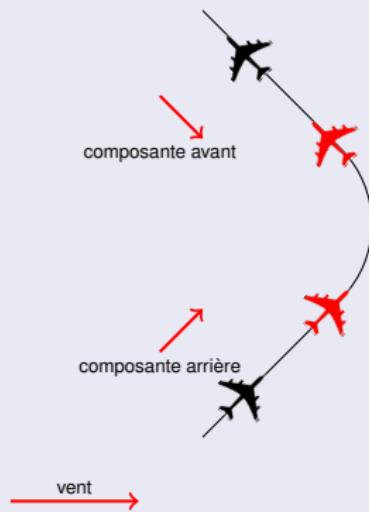
Modèle des incertitudes

- décallages longitudinaux
- décallages latéraux corrigés par le FMS
- champ gaussien du vent

Introduction et contexte

Gestion du trafic en-route

Influence du vent



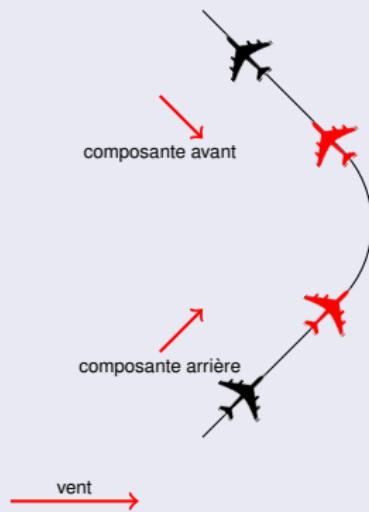
Modèle des incertitudes

- décallages longitudinaux
 - décallages latéraux corrigés par le FMS
- champ gaussien du vent
 - projection du vent sur la trajectoire

Introduction et contexte

Gestion du trafic en-route

Influence du vent



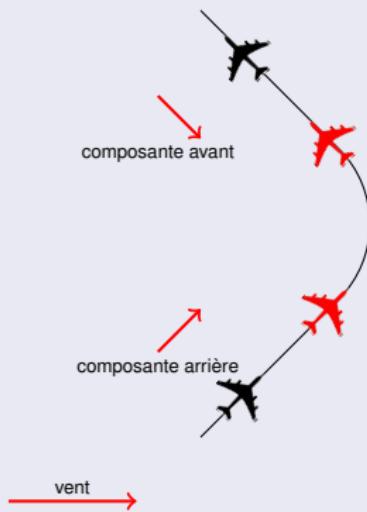
Modèle des incertitudes

- décallages longitudinaux
 - décallages latéraux corrigés par le FMS
- champ gaussien du vent
 - projection du vent sur la trajectoire
 - gaussienne définie par son biais et son écart-type

Introduction et contexte

Gestion du trafic en-route

Influence du vent



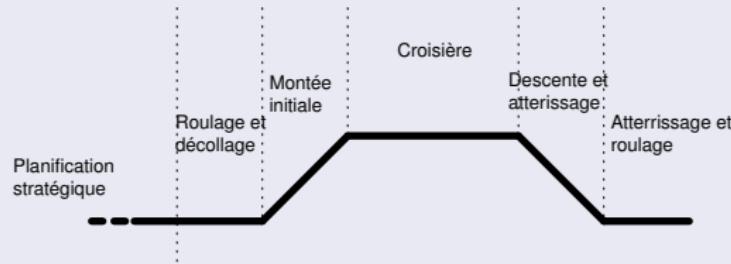
Modèle des incertitudes

- décallages longitudinaux
 - décallages latéraux corrigés par le FMS
- champ gaussien du vent
 - projection du vent sur la trajectoire
 - gaussienne définie par son biais et son écart-type
- variation aux premiers et second ordres

Introduction et contexte

Gestion du trafic en-route

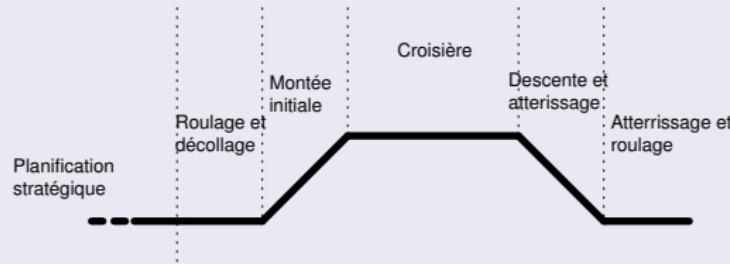
Phases d'un vol



Introduction et contexte

Gestion du trafic en-route

Phases d'un vol



Phase de croisière

- Trajectoires 2D

Introduction et contexte

Modélisation

Séparation des aéronefs

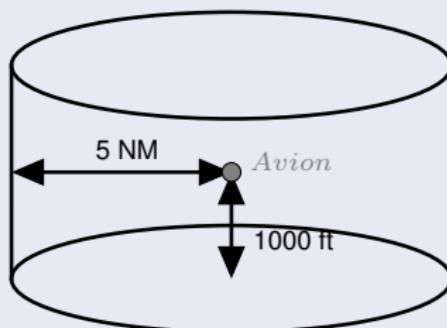


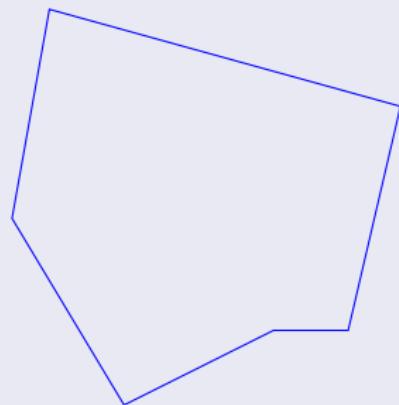
FIGURE : Cylindre de protection d'un avion en route

Introduction et contexte

Modélisation

Modélisation du problème

- Secteur aérien en-route

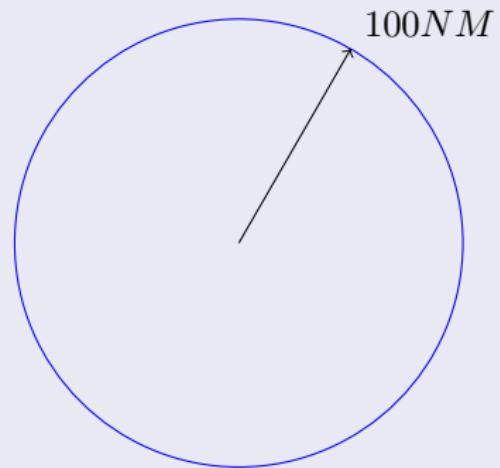


Introduction et contexte

Modélisation

Modélisation du problème

- Secteur aérien en-route

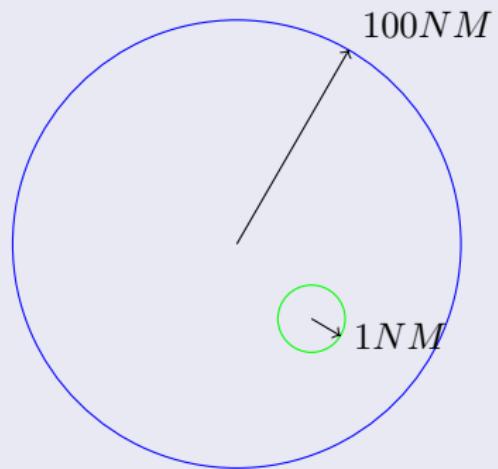


Introduction et contexte

Modélisation

Modélisation du problème

- Secteur aérien en-route
- Zone d'arrivée (TMA)

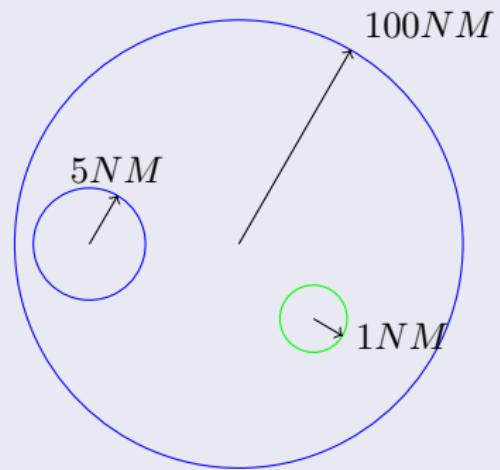


Introduction et contexte

Modélisation

Modélisation du problème

- Secteur aérien en-route
- Zone d'arrivée (TMA)
- Obstacle(s)



Introduction et contexte

Fonctions de navigation harmoniques

Gradient du champ de potentiel harmonique

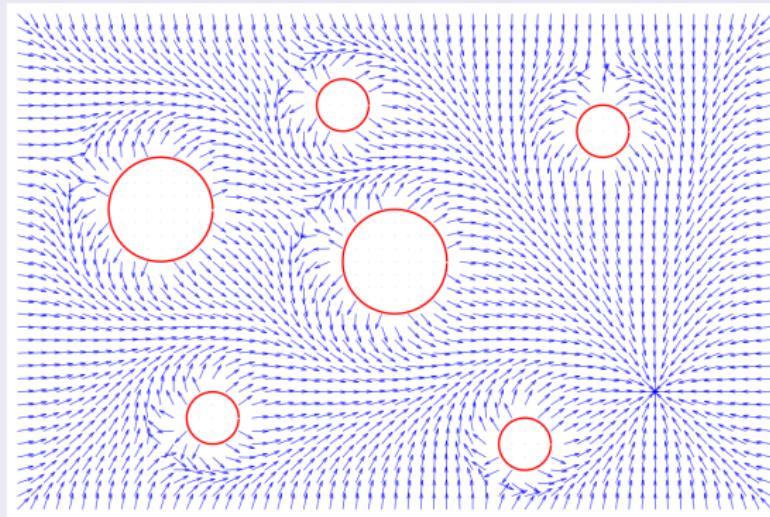


FIGURE : Guys, 2014

Introduction et contexte

Fonctions de navigation harmoniques

Trajectoires générées à partir du gradient

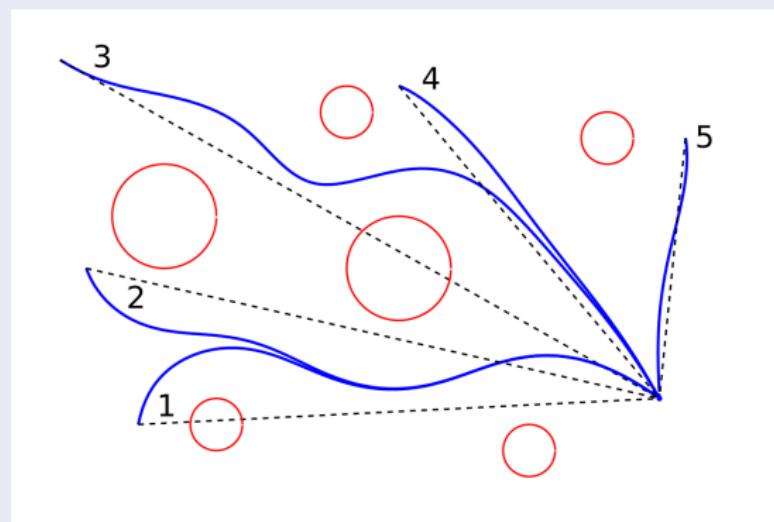


FIGURE : Guys, 2014

Introduction et contexte

Fonctions de navigation harmoniques

Potentiel harmonique

ϕ , une fonction deux fois continûment dérivable sur un ouvert $U \in \mathbb{R}^n$, est un potentiel harmonique si

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{sur } U \\ \phi = f & \text{sur } \partial U \end{cases} \quad (1)$$

où Δ est l'opérateur Laplacien

$$\Delta = \sum_n \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \quad (2)$$

et où $f : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue.

Variation de Hadamard

- 1 Variation de Hadamard
- 2 Résultats et discussion
- 3 Conclusion et perspectives

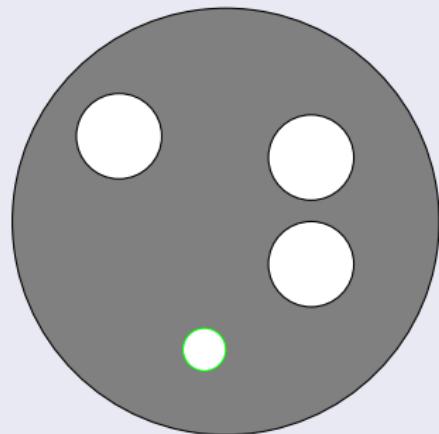
Variation de Hadamard

Perturbation de la solution harmonique

Fonction de navigation

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur le bord destination} \\ u = 1 & \text{sur les autres bords} \end{cases} \quad (3)$$

Domaine Ω



Variation de Hadamard

Perturbation de la solution harmonique

Perturbation du domaine

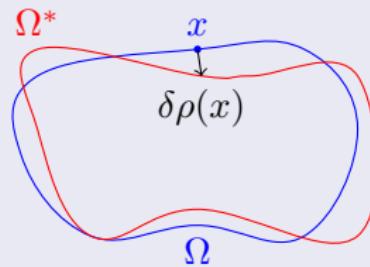


FIGURE : Variation $\delta\rho$ du domaine Ω en un point x du bord

Variation de Hadamard

Perturbation de la solution harmonique

Perturbation du domaine

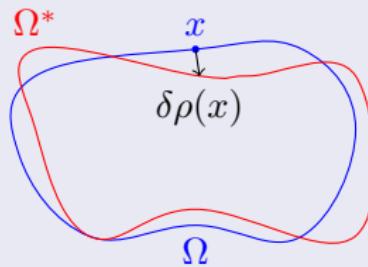


FIGURE : Variation $\delta\rho$ du domaine Ω en un point x du bord

Perturbation de la solution

$$u^* = u + \delta u \tag{4}$$

Variation de Hadamard

Perturbation de la solution harmonique

Perturbation du domaine

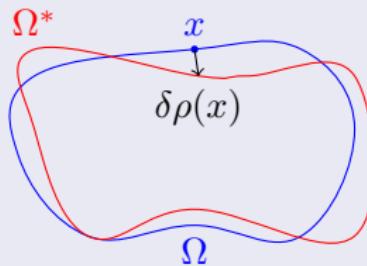


FIGURE : Variation $\delta\rho$ du domaine Ω en un point x du bord

Perturbation de la solution

$$u^* = u + \delta u \tag{4}$$

$$\delta u = f(\delta\rho) ?$$

Variation de Hadamard

Définitions préliminaires

Définition

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . On appelle solution fondamentale du Laplacien une application $G : \bar{\Omega} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout élément $z_0 \in \Omega$, l'application $z \mapsto G(z, z_0)$ soit une fonction harmonique sur $\bar{\Omega} \setminus \{z_0\}$ et

$$\lim_{z \rightarrow z_0} G(z, z_0) = +\infty \quad (5)$$

La fonction de Green est la solution fondamentale du Laplacien vérifiant une condition aux limites nulle.

Variation de Hadamard

Définitions préliminaires

Définition

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . On appelle solution fondamentale du Laplacien une application $G : \bar{\Omega} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout élément $z_0 \in \Omega$, l'application $z \mapsto G(z, z_0)$ soit une fonction harmonique sur $\bar{\Omega} \setminus \{z_0\}$ et

$$\lim_{z \rightarrow z_0} G(z, z_0) = +\infty \quad (5)$$

La fonction de Green est la solution fondamentale du Laplacien vérifiant une condition aux limites nulle.

Théorème

Soit G la fonction de Green du Laplacien sur le domaine Ω . Alors pour tout $z_0 \in \Omega$, on a, au sens des distributions

$$\Delta_z G(\cdot, z_0) = \delta_{z_0} \quad (6)$$

Variation de Hadamard

Définitions préliminaires

Théorème

Soit $\Omega \in \mathbb{C}$ un domaine du plan complexe. Le problème

$$-\Delta u = 0 \text{ sur } \Omega, \quad u = f \text{ sur } \partial\Omega \quad (7)$$

où $f \in L^2(\Omega)$ est appelé *problème harmonique* et admet une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$.

Variation de Hadamard

Définitions préliminaires

Théorème

Soit $\Omega \in \mathbb{C}$ un domaine du plan complexe. Le problème

$$-\Delta u = 0 \text{ sur } \Omega, \quad u = f \text{ sur } \partial\Omega \quad (7)$$

où $f \in L^2(\Omega)$ est appelé problème harmonique et admet une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$.

Théorème

La solution u du problème harmonique peut s'écrire

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial G}{\partial n}(x, y) dy \quad (8)$$

Variation de Hadamard

Définitions préliminaires

Théorème

Soit $\Omega \in \mathbb{C}$ un domaine du plan complexe. Le problème

$$-\Delta u = 0 \text{ sur } \Omega, \quad u = f \text{ sur } \partial\Omega \quad (7)$$

où $f \in L^2(\Omega)$ est appelé *problème harmonique* et admet une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$.

Théorème

La solution u du problème harmonique peut s'écrire

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial G}{\partial n}(x, y) dy \quad (8)$$

Définition

Pour tout point intérieur $z_0 \in \Omega$, on note $g_{z_0} : z \mapsto G(z, z_0)$

Variation de Hadamard

Définitions préliminaires

Perturbation de la solution

$$u^* = u + \delta u \quad (9)$$

Perturbation du domaine



Variation de Hadamard

Définitions préliminaires

Perturbation de la solution

$$u^* = u + \delta u \quad (9)$$

Variation de la solution harmonique

$$\delta u(x, y) = \int_{\partial\Omega} \delta\rho(w) \frac{\partial G(y, w)}{\partial n} \frac{\partial u(w)}{\partial n} d\sigma(w) \quad (10)$$

Perturbation du domaine



Variation de Hadamard

Définitions préliminaires

Perturbation de la solution

$$u^* = u + \delta u \quad (9)$$

Variation de la solution harmonique

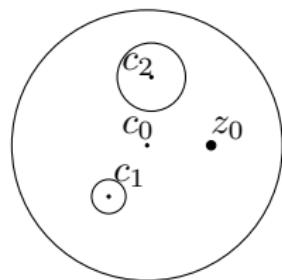
$$\delta u(x, y) = \int_{\partial\Omega} \delta\rho(w) \frac{\partial G(y, w)}{\partial n} \frac{\partial u(w)}{\partial n} d\sigma(w) \quad (10)$$

Perturbation du domaine



Variation de Hadamard

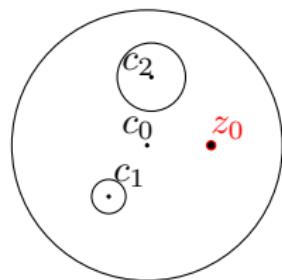
Calcul semi-analytique de la fonction de Green



- $g(z) = 0$ sur le bord et $\Delta g = \delta_{z_0}$ sur Ω

Variation de Hadamard

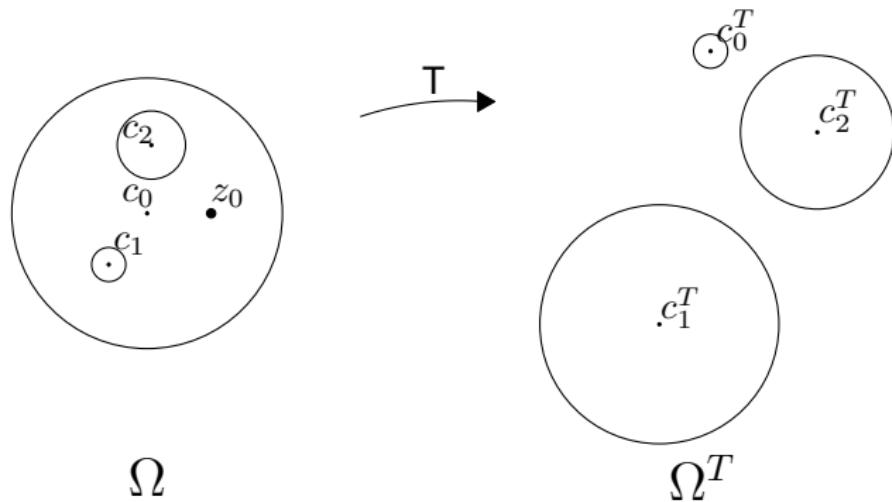
Calcul semi-analytique de la fonction de Green



- $g(z) = 0$ sur le bord et $\Delta g = \delta_{z_0}$ sur Ω

Variation de Hadamard

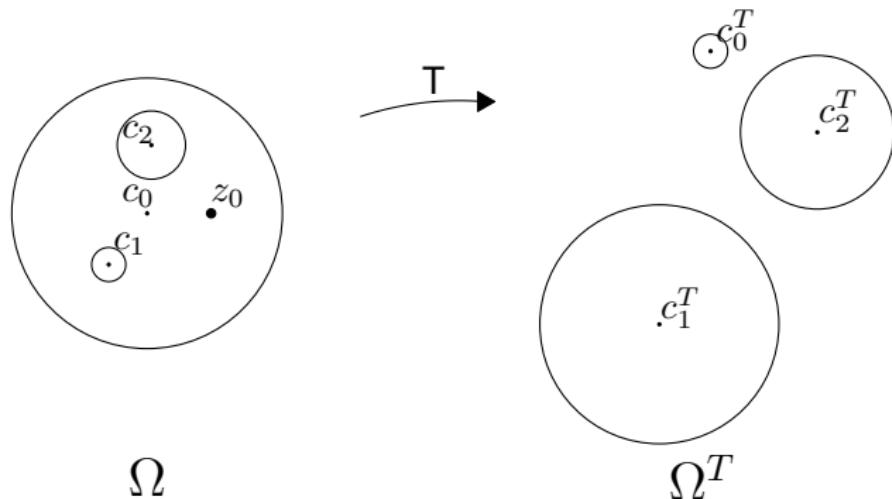
Calcul semi-analytique de la fonction de Green



- $g(z) = 0$ sur le bord et $\Delta g = \delta_{z_0}$ sur Ω
- $g = h \circ T$
- Transformation conforme du domaine $T : z \mapsto \frac{1}{z-z_0}$

Variation de Hadamard

Calcul semi-analytique de la fonction de Green



- $g(z) = 0$ sur le bord et $\Delta g = \delta_{z_0}$ sur Ω
- $g = h \circ T$
- Transformation conforme du domaine $T : z \mapsto \frac{1}{z - z_0}$
- $h(z) = 0$ sur le bord et $h(z) \sim \log |z|$ quand $|z| \rightarrow \infty$

Variation de Hadamard

Calcul semi-analytique de la fonction de Green

- Déterminer $\alpha, \beta_j, \lambda_{jk}, \mu_{jk}$

$$\forall z \in \Omega, h(z) = \alpha + \sum_{j=1}^J \beta_j \log |z - c_j| + \Re \left(\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{jk} - i\mu_{jk})(z - c_j)^{-k} \right) \quad (11)$$

avec

$$\sum_{j=1}^J \beta_j = 1 \quad (12)$$

Variation de Hadamard

Calcul semi-analytique de la fonction de Green

- Déterminer $\alpha, \beta_j, \lambda_{jk}, \mu_{jk}$

$$\forall z \in \Omega, h(z) = \underbrace{\alpha + \sum_{j=1}^J \beta_j \log |z - c_j|}_{\text{solution fondamentale}} + \underbrace{\Re \left(\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{jk} - i\mu_{jk})(z - c_j)^{-k} \right)}_{\text{développement en série de Laurent}} \quad (11)$$

avec

$$\sum_{j=1}^J \beta_j = 1 \quad (12)$$



Variation de Hadamard

Calcul semi-analytique de la fonction de Green

- Déterminer $\alpha, \beta_j, \lambda_{jk}, \mu_{jk}$

$$\forall z \in \Omega, h(z) \approx \underbrace{\alpha + \sum_{j=1}^J \beta_j \log |z - c_j|}_{\text{solution fondamentale}} + \underbrace{\Re \left(\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^N (\lambda_{jk} - i\mu_{jk})(z - c_j)^{-k} \right)}_{\text{développement en série de Laurent}} \quad (11)$$

avec

$$\sum_{j=1}^J \beta_j = 1 \quad (12)$$



Variation de Hadamard

Calcul semi-analytique de la fonction de Green

- Déterminer $\alpha, \beta_j, \lambda_{jk}, \mu_{jk}$

$$\forall z \in \Omega, h(z) \approx \underbrace{\alpha + \sum_{j=1}^J \beta_j \log |z - c_j|}_{\text{solution fondamentale}} + \underbrace{\Re \left(\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^N (\lambda_{jk} - i\mu_{jk})(z - c_j)^{-k} \right)}_{\text{développement en série de Laurent}} \quad (11)$$

avec

$$\sum_{j=1}^J \beta_j = 1 \quad (12)$$

- Transformer le problème en problème d'optimisation sous contraintes

$$\begin{cases} \min ||AX||^2 \\ \text{s.t. } v^T X = p \end{cases} \quad (13)$$

Variation de Hadamard

Calcul semi-analytique de la fonction de Green

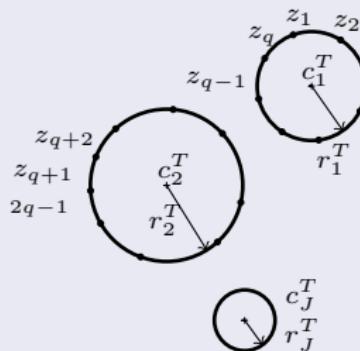


FIGURE : J cercles $(c_1^T, r_1^T), (c_2^T, r_2^T), \dots, (c_J^T, r_J^T)$ sur lesquels on place les points de collocation z_1, z_2, \dots, z_{n_c}

Variation de Hadamard

Calcul semi-analytique de la fonction de Green

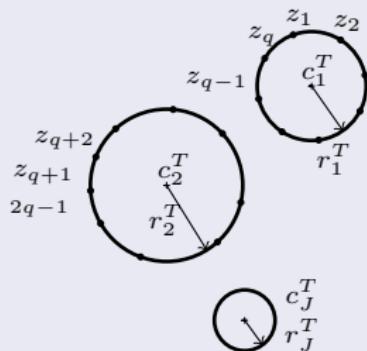


FIGURE : J cercles $(c_1^T, r_1^T), (c_2^T, r_2^T), \dots, (c_J^T, r_J^T)$ sur lesquels on place les points de collocation z_1, z_2, \dots, z_{n_c}

Pour tout point $z_i \in \partial\Omega$ du bord,

$$h(z_i) = 0 \tag{14}$$

Variation de Hadamard

Calcul semi-analytique de la fonction de Green

Réécriture sous forme matricielle

$$\alpha + \sum_{j=1}^J \beta_j \log |z - c_j| + \Re \left(\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^N (\lambda_{jk} - i\mu_{jk})(z - c_j)^{-k} \right) = 0 \quad (15)$$

Variation de Hadamard

Calcul semi-analytique de la fonction de Green

Réécriture sous forme matricielle

$$\alpha + \sum_{j=1}^J \beta_j \log |z - c_j| + \Re \left(\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^N (\lambda_{jk} - i\mu_{jk})(z - c_j)^{-k} \right) = 0 \quad (15)$$

$$X = (\alpha, \beta_1, \dots, \beta_J, \lambda_{11}, \mu_{11}, \dots, \lambda_{JN}, \mu_{JN}) \quad (16)$$

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & \log |z_i - c_1| & \dots & \log |z_i - c_J| & \Re((z_i - c_1)^{-1}) & \Im((z_i - c_1)^{-1}) & \dots \end{pmatrix} \quad (17)$$

Variation de Hadamard

Calcul semi-analytique de la fonction de Green

Réécriture sous forme matricielle

$$\alpha + \sum_{j=1}^J \beta_j \log |z - c_j| + \Re \left(\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^N (\lambda_{jk} - i\mu_{jk})(z - c_j)^{-k} \right) = 0 \quad (15)$$

$$X = (\alpha, \beta_1, \dots, \beta_J, \lambda_{11}, \mu_{11}, \dots, \lambda_{JN}, \mu_{JN}) \quad (16)$$

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & \log |z_i - c_1| & \dots & \log |z_i - c_J| & \Re((z_i - c_1)^{-1}) & \Im((z_i - c_1)^{-1}) & \dots \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\min ||AX||^2 \quad (18)$$

Variation de Hadamard

Calcul semi-analytique de la fonction de Green

Réécriture sous forme matricielle

$$\sum_{j=1}^J \beta_j = 1 \quad (19)$$

Variation de Hadamard

Calcul semi-analytique de la fonction de Green

Réécriture sous forme matricielle

$$\sum_{j=1}^J \beta_j = 1 \quad (19)$$

$$v = \left(0 \xleftarrow{J} \begin{matrix} 1 & \dots & 1 \end{matrix} \xleftarrow{2NJ} \begin{matrix} 0 & \dots & \dots & 0 \end{matrix} \right) \quad (20)$$

$$p = 1 \quad (21)$$

Variation de Hadamard

Calcul semi-analytique de la fonction de Green

Réécriture sous forme matricielle

$$\sum_{j=1}^J \beta_j = 1 \quad (19)$$

$$v = \left(0 \xleftarrow[J]{} \begin{matrix} 1 & \dots & 1 \end{matrix} \xleftarrow[2NJ]{} \begin{matrix} 0 & \dots & \dots & 0 \end{matrix} \right) \quad (20)$$

$$p = 1 \quad (21)$$

$$v^T X = p \quad (22)$$

Variation de Hadamard

Calcul semi-analytique de la fonction de Green

$$\begin{cases} \min ||AX||^2 \\ \text{s.t. } v^T X = p \end{cases} \quad (23)$$

Variation de Hadamard

Calcul semi-analytique de la fonction de Green

$$\begin{cases} \min ||AX||^2 \\ \text{s.t. } v^T X = p \end{cases} \quad (23)$$

$$h : z \in \bar{\Omega} \mapsto \alpha + \sum_{j=1}^J \beta_j \log |z - c_j| + \Re \left(\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^N (\lambda_{jk} - i\mu_{jk})(z - c_j)^{-k} \right) \quad (24)$$

Variation de Hadamard

Calcul semi-analytique de la fonction de Green

$$\begin{cases} \min ||AX||^2 \\ \text{s.t. } v^T X = p \end{cases} \quad (23)$$

$$h : z \in \bar{\Omega} \mapsto \alpha + \sum_{j=1}^J \beta_j \log |z - c_j| + \Re \left(\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^N (\lambda_{jk} - i\mu_{jk})(z - c_j)^{-k} \right) \quad (24)$$

Enfin

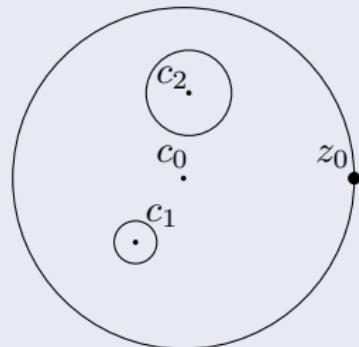
$$g = h \circ T^{-1} \quad (25)$$



Variation de Hadamard

Situations exceptionnelles

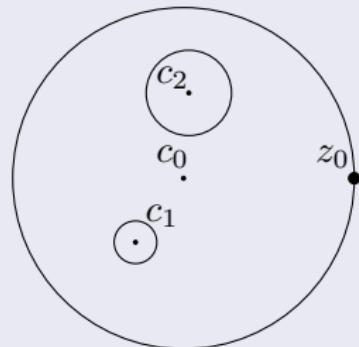
Point d'inversion sur un bord du domaine



Variation de Hadamard

Situations exceptionnelles

Point d'inversion sur un bord du domaine

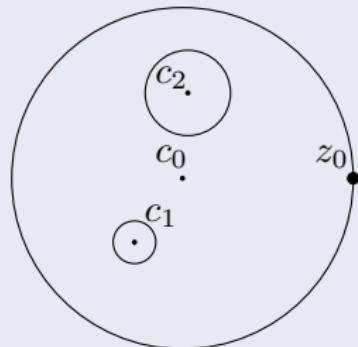


- la transformée du bord est une droite

Variation de Hadamard

Situations exceptionnelles

Point d'inversion sur un bord du domaine

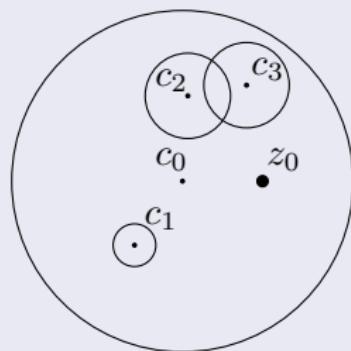


- la transformée du bord est une droite
- G défini sur $\bar{\Omega} \times \Omega$

Variation de Hadamard

Situations exceptionnelles

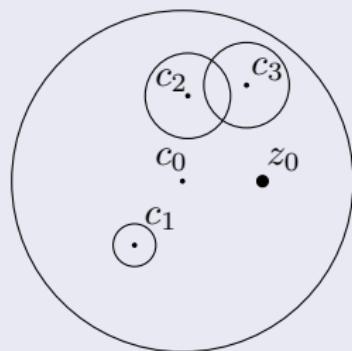
Cercles non-disjoints



Variation de Hadamard

Situations exceptionnelles

Cercles non-disjoints

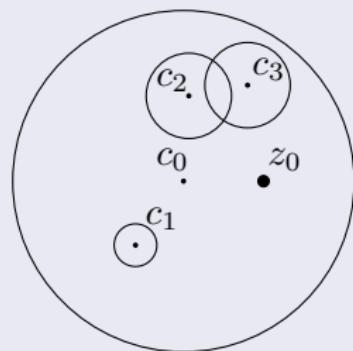


- définition de h

Variation de Hadamard

Situations exceptionnelles

Cercles non-disjoints

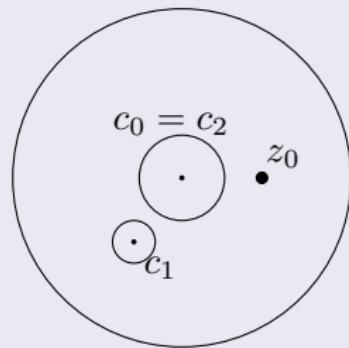


- définition de h
- situation de conflit

Variation de Hadamard

Situations exceptionnelles

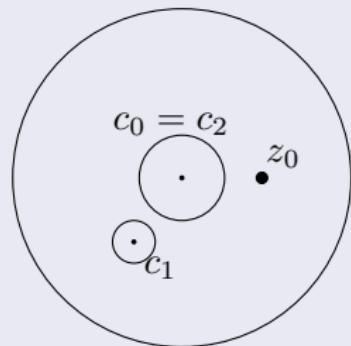
Obstacle concentrique au bord extérieur



Variation de Hadamard

Situations exceptionnelles

Obstacle concentrique au bord extérieur



- $c_0 = c_0 + \epsilon, \epsilon > 0$

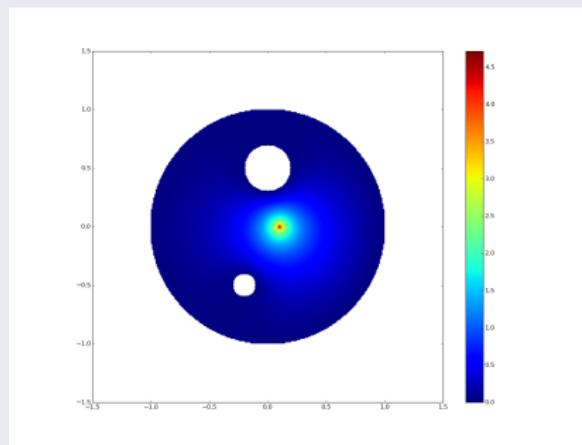
Résultats et discussion

- 1 Variation de Hadamard
- 2 Résultats et discussion
- 3 Conclusion et perspectives

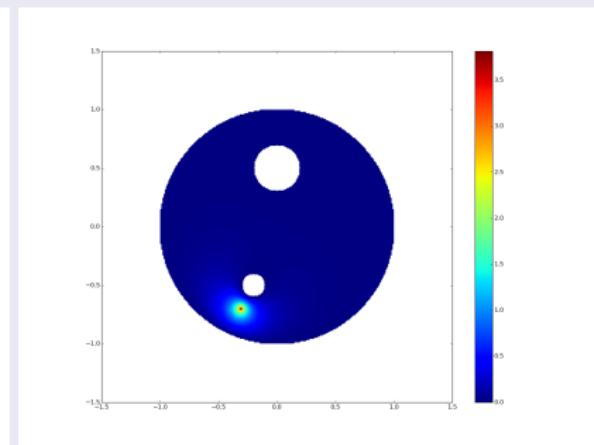
Résultats et discussion

Calcul semi-analytique de la fonction de Green

Fonction de Green



(a) Point singulier $z_0 = 0.1$



(b) Point singulier $z_0 = -0.3 - 0.7i$

FIGURE : Approximation g de la fonction de Green sur le disque unité avec un obstacle de rayon 0.1 et de centre $-0.2 - 0.5i$ et avec un disque destination de rayon 0.2 et de centre $0.5i$. $N = 5$ termes dans la série de Laurent, $n_c = 15$ points de colocation.

Résultats et discussion

Calcul semi-analytique de la fonction de Green

Conditions aux limites constantes

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n}(x, y) dy = 1 \quad (26)$$

Résultats et discussion

Calcul semi-analytique de la fonction de Green

Conditions aux limites constantes

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n}(x, y) dy = 1 \quad (26)$$

Indicateur d'erreur

$$\varepsilon(x) = \left| 1 - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial g}{\partial n}(x, y) dy \right| \quad (27)$$

Résultats et discussion

Calcul semi-analytique de la fonction de Green

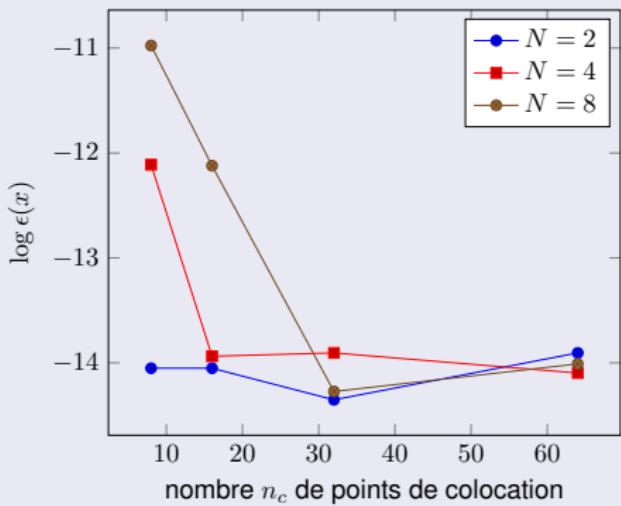
Conditions aux limites constantes

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n}(x, y) dy = 1 \quad (26)$$

Indicateur d'erreur

$$\varepsilon(x) = \left| 1 - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial g}{\partial n}(x, y) dy \right| \quad (27)$$

Erreur sur la reconstruction



Résultats et discussion

Calcul semi-analytique de la fonction de Green

Domaine de définition

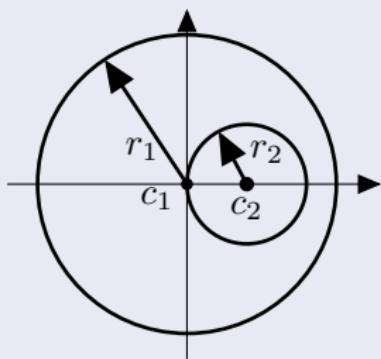


FIGURE : Domaine Ω sur lequel une solution analytique de l'équation harmonique existe

Résultats et discussion

Calcul semi-analytique de la fonction de Green

Domaine de définition

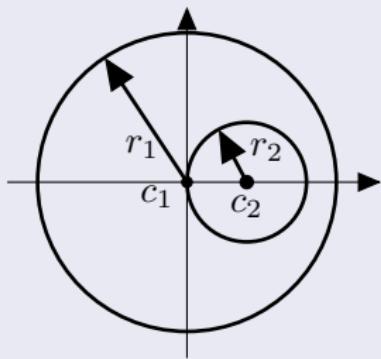


FIGURE : Domaine Ω sur lequel une solution analytique de l'équation harmonique existe

Expression analytique de la solution harmonique

$$u_e : z \in \Omega \mapsto \frac{b-a}{\log 2} \log \left| \frac{2z-1}{z-2} \right| + b \quad (28)$$

Résultats et discussion

Calcul semi-analytique de la fonction de Green

Domaine de définition

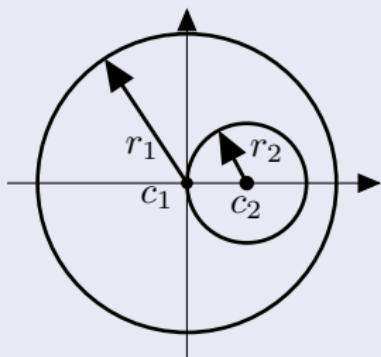


FIGURE : Domaine Ω sur lequel une solution analytique de l'équation harmonique existe

Expression analytique de la solution harmonique

$$u_e : z \in \Omega \mapsto \frac{b-a}{\log 2} \log \left| \frac{2z-1}{z-2} \right| + b \quad (28)$$

Indicateur d'erreur

$$\epsilon : z \in \Omega \mapsto |u_e(z) - u_g(z)| \quad (29)$$

Résultats et discussion

Calcul semi-analytique de la fonction de Green

Comparaison à l'analytique

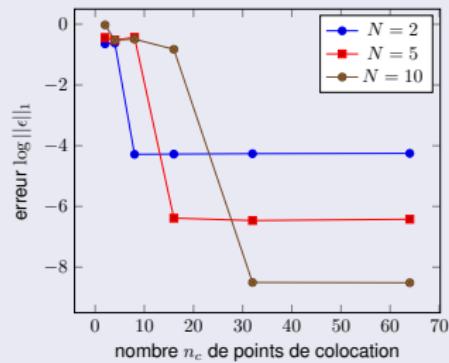


FIGURE : $\log ||\epsilon||_1$ pour la comparaison entre la reconstruction à partir de la fonction de Green et la solution analytique

Résultats et discussion

Calcul semi-analytique de la fonction de Green

Comparaison à l'analytique

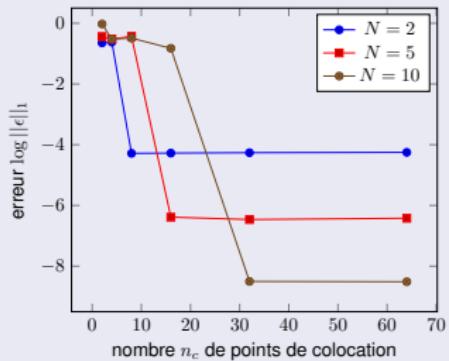


FIGURE : $\log ||\epsilon||_1$ pour la comparaison entre la reconstruction à partir de la fonction de Green et la solution analytique

Méthode des éléments finis

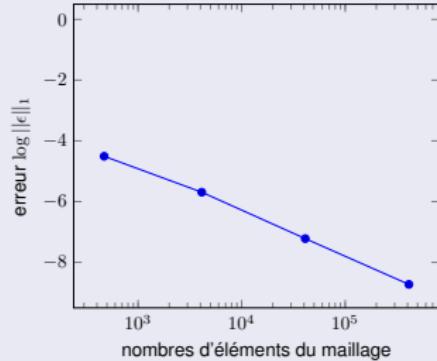


FIGURE : Comparaison à la méthode des éléments finis pour des éléments P_2 et un maillage obtenu par triangulation Delaunay

Résultats et discussion

Calcul semi-analytique de la fonction de Green

Temps de calcul normalisé

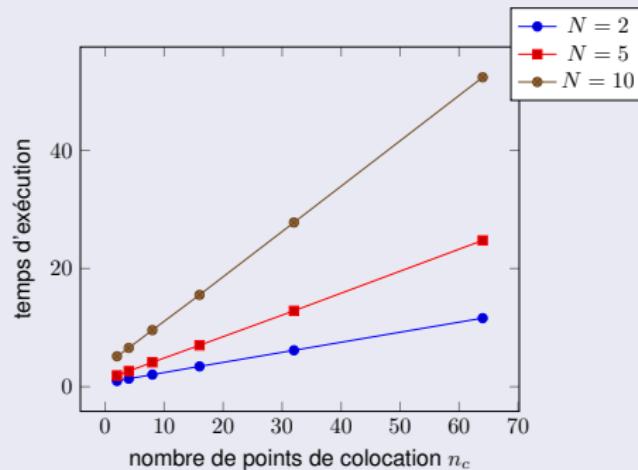
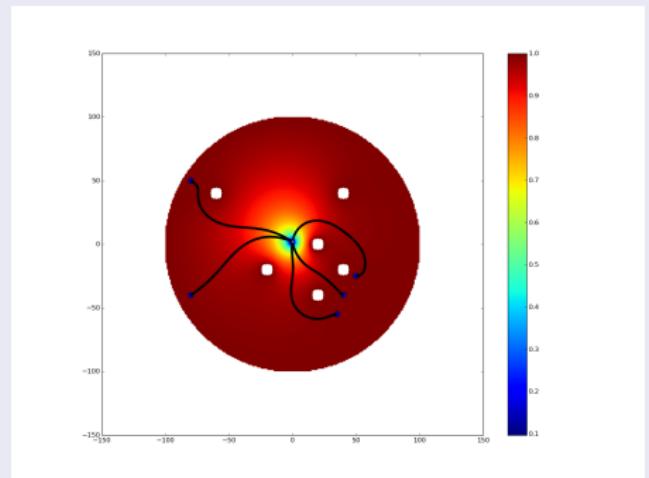


FIGURE : Temps d'exécution normé de l'algorithme en fonction du nombre n_c de points par cercle pour différents nombres N de termes dans la série de Laurent

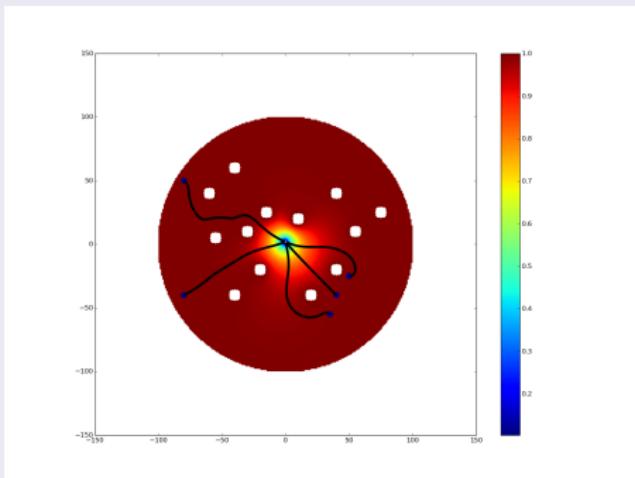
Résultats et discussion

Calcul semi-analytique de la fonction de Green

Fonctions de navigation



(a) 6 obstacles



(b) 12 obstacles

FIGURE : Fonctions de navigations calculés au départ des points $40 - 40i$, $35 - 55i$, $50 - 25i$, $-80 - 40i$ and $-80 + 50i$

Résultats et discussion

Variation de la solution harmonique

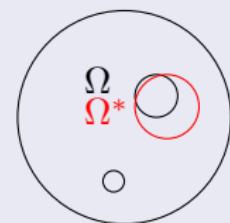


FIGURE : u définie sur Ω ,
 u^* définie sur Ω^*

Résultats et discussion

Variation de la solution harmonique

Indicateur d'erreur

$$u^* \approx \tilde{u} = u + \delta u \quad (30)$$

$$\varepsilon_g = \left\| \frac{|(u^* - u) - \delta u|}{|\delta \rho|} \right\|_1 \quad (31)$$

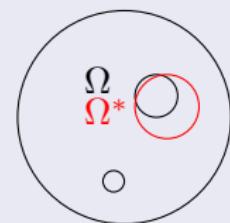
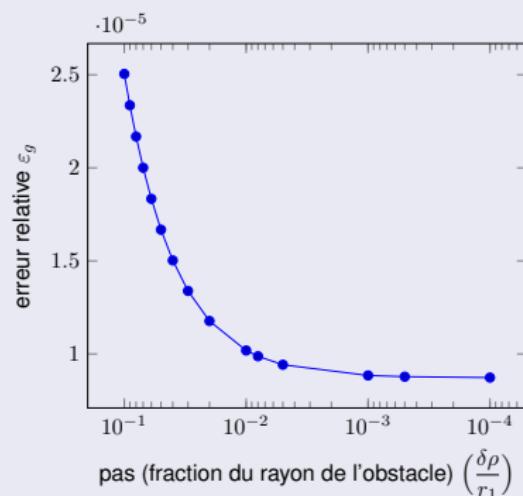


FIGURE : u définie sur Ω ,
 u^* définie sur Ω^*

Résultats et discussion

Variation de la solution harmonique

Cas test : translation du disque



$$\varepsilon_g = \left\| \frac{|(u^* - u) - \delta u|}{|\delta \rho|} \right\|_1$$

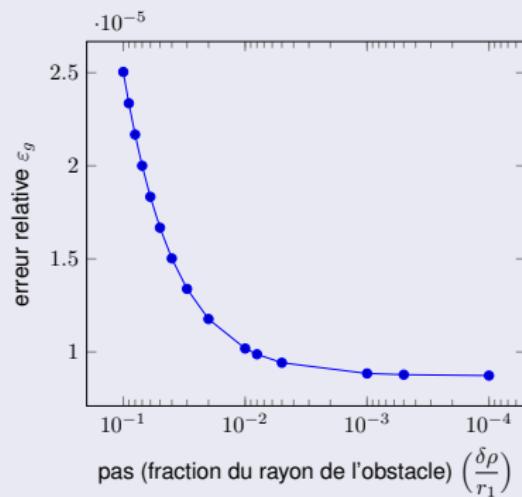


FIGURE : Réponse à une translation du disque intérieur.

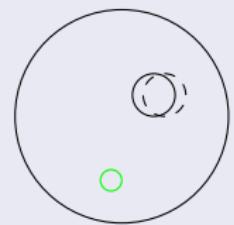
Résultats et discussion

Variation de la solution harmonique

Cas test : translation du disque



$$\varepsilon_g = \left\| \frac{(u^* - u) - \delta u}{|\delta \rho|} \right\|_1$$



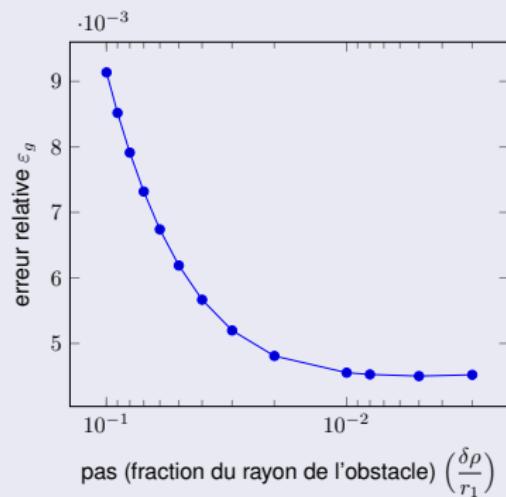
- Norme \mathcal{L}^1 de dérivées
 - Régime linéaire de l'approximation

FIGURE : Réponse à une translation du disque intérieur.

Résultats et discussion

Variation de la solution harmonique

Cas test : dilatation du disque



$$\varepsilon_g = \left\| \frac{|(u^* - u) - \delta u|}{|\delta\rho|} \right\|_1$$

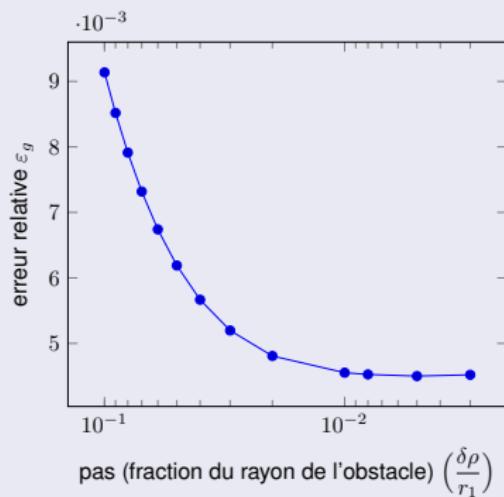


FIGURE : Réponse à une dilatation du disque intérieur.

Résultats et discussion

Variation de la solution harmonique

Cas test : dilatation du disque



$$\varepsilon_g = \left\| \frac{|(u^* - u) - \delta u|}{|\delta\rho|} \right\|_1$$



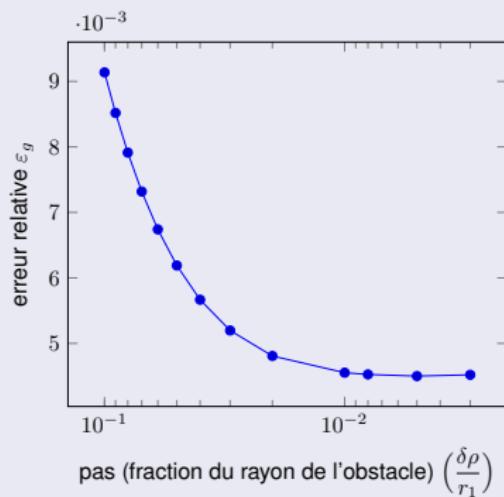
- La solution est plus sensible à une dilatation qu'à une translation

FIGURE : Réponse à une dilatation du disque intérieur.

Résultats et discussion

Variation de la solution harmonique

Cas test : dilatation du disque



$$\varepsilon_g = \left\| \frac{|(u^* - u) - \delta u|}{|\delta\rho|} \right\|_1$$



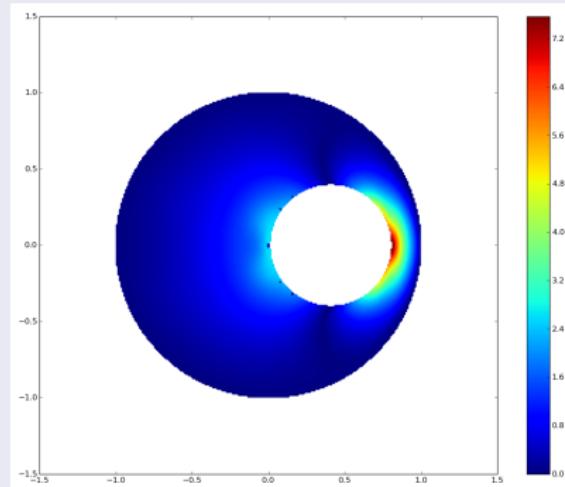
- La solution est plus sensible à une dilatation qu'à une translation
- Pas de sens opérationnel

FIGURE : Réponse à une dilatation du disque intérieur.

Résultats et discussion

Variation de la solution harmonique

Sensibilité des points du domaine à une perturbation



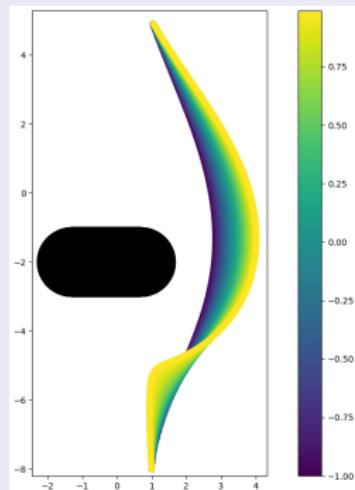
- $\frac{\delta u}{\delta \rho}$
- Translation seule

FIGURE : Variation de la solution pour une perturbation de l'obstacle

Résultats et discussion

Variation de la solution harmonique

Variation des trajectoires



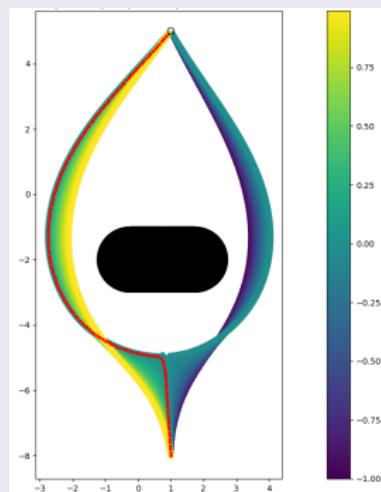
- Translation seule

FIGURE : Trajectoires construites pour plusieurs positions de l'obstacle

Résultats et discussion

Variation de la solution harmonique

Variation des trajectoires



- Translation seule
- L'enveloppe des trajectoires contient l'obstacle

FIGURE : Trajectoires construites pour plusieurs positions de l'obstacle

Conclusion et perspectives

- 1 Variation de Hadamard
- 2 Résultats et discussion
- 3 Conclusion et perspectives

Conclusion et perspectives

Contribution

- modélisation du problème

Conclusion et perspectives

Contribution

- modélisation du problème
- méthode de calcul semi-analytique de la fonction de Green du Laplacien

Conclusion et perspectives

Contribution

- modélisation du problème
- méthode de calcul semi-analytique de la fonction de Green du Laplacien
- utilisation de la variation de Hadamard

Conclusion et perspectives

Contribution

- modélisation du problème
- méthode de calcul semi-analytique de la fonction de Green du Laplacien
- utilisation de la variation de Hadamard
- application aux trajectoires d'avions soumis à un vent incertain

Conclusion et perspectives

Perspectives

Pistes pour des travaux futurs

- Réduction du temps de calcul
 - parallélisation de l'algorithme
 - optimisation du temps de calcul de l'intégrale numérique

Conclusion et perspectives

Perspectives

Pistes pour des travaux futurs

- Réduction du temps de calcul
 - parallélisation de l'algorithme
 - optimisation du temps de calcul de l'intégrale numérique
- Amélioration des performances
 - deuxième variation de Hadamard

Conclusion et perspectives

Perspectives

Pistes pour des travaux futurs

- Réduction du temps de calcul
 - parallélisation de l'algorithme
 - optimisation du temps de calcul de l'intégrale numérique
- Amélioration des performances
 - deuxième variation de Hadamard
- Extensions de mes travaux
 - mouvements coordonnés non-séquentiels
 - extension aux fonctions de navigation biharmoniques

Conclusion et perspectives

Perspectives

Merci